Жиындар; нақты сандар; бейнелеулер; функция.

Математикалық сөйлемдер құрылымы және оларды логикалық символикалар арқылы жазу. Жиын ұғымы және оларға қолданылатын қарапайым амалдар. Жиындар бейнелеулері және функция ұғымы. Нақты сандар жиыны анықтамасы. Сандық жиынның жоғарғы және төменгі шекаралары. Бос емес сандық жиынның жоғарғы және төменгі шекараларының бар болуы және жалғыздығы туралы теорема.

Біз математикалық логиканың "керілеу", "және", "немесе", "туады", "шығады", "тең мағыналы" деп аталатын және сәйкес $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ символдары арқылы белгіленетін байланыстарын пайдаланатын боламыз. Мысалы, А қасиетінен В қасиетінің шығатынын қысқаша A$\Rightarrow$B түрінде жазамыз. Математикалық символдардың әсер ету реті де жоғарыда келтірілген түрде болады. Мысалы, $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ өрнегін былай түсінеміз: $(((\neg A) \wedge B) \vee C) \Rightarrow D$. Егер мұны $((\neg A) \wedge (B \vee C)) \Rightarrow D$ немесе $(\neg(A \wedge B) \vee C) \Rightarrow D$ деп жазсақ қателесеміз. Осы сияқты қарапайым $A \vee B \Rightarrow C$ сөйлемін $(A \vee B) \Rightarrow C$ деп түсінеміз, ал оны $A \vee (B \Rightarrow C)$ деп түсіну қате.

Шарт деп аталатын А қасиетінен қорытынды деп аталатын В қасиетін шығару – *теорема* деп аталады. Мұны қысқаша $A \Rightarrow B$ деп те жазуға болады. Осы $A \Rightarrow B$ жазуын былай да талқылауға болады: "А орындалуы үшін В орындалуы қажетті белгі" және "В орындалуы үшін А орындалуы жеткілікті белгі", яғни В үшін А жеткілікті шарт, ал А үшін В қажетті шарт.

Егер $B \Rightarrow A$ болса, онда оны *кері теорема* деп атайды.

Егер $A \Rightarrow B$ және $B \Rightarrow A$ болса, онда А және В қасиеттерін тең мағыналы немесе эквивалентті немесе пара-пар дейді де $A \Leftrightarrow B$ арқылы жазады. Мұны "В үшін А қажетті және жеткілікті", "А орындалады сонда және тек сонда, егер В орындалса", "А және В тең мағыналы" және т.т. деп оқуға болады. Кейде $A \Leftrightarrow B$ түріндегі теореманы критерий деп те атайды, тіпті оны анықтама ретінде де пайдаланады.

Сонымен бірге математикалық сөйлемдерді жазуда "бар", "табылады", "белгілі бір" сөздерінің орнына *бар болу кванторы* деп аталатын $\exists$ логикалық операторын және "кез-келген", "барлық", "әрбір", "қандай да болмасын" сөздері үшін жалпылау кванторы деп аталатын $\forall$ логикалық операторын жиі қолданатын боламыз.

Біз төменде " а – А жиынының элементі" деген сөйлемді қысқаша $a \in A$ немесе $A \ni a$, ал оның керілеуін $a \notin A$ немесе $A \not\ni a$ арқылы белгілеп жазатын боламыз. Сонда $\forall x \ \ ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ жазуын "кез-келген элемент x үшін $x \in A$ және $x \in B$ қатынастары тең мағыналы" деп айтамыз. Міне осы сөйлемді қысқаша $A = B$ арқылы белгілеу қабылданған, мұны "А тең В" деп оқиды.

Теңдік "=" символы арқылы, ал теңбе-теңдік " $\equiv$" символы арқылы белгіленеді. Теңдік таңбасы анықтама ретінде де қолданылуы мүмкін, онда оның үстіне def символын жазып қою да қабылданған. Сонда "А тең В" сөйлемін A=B деп, ал оның керілеуі $\neg(A = B)$ мына $A \neq B$ түрінде жазылады.

Күрделі сөйлемдерді немесе күрделі логикалық формулаларды жақшаларды пайдаланып, $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ байланыстары мен $\forall, \exists$ кванторлары арқылы жазуға болады.

Мысалы, "кез-келген x үшін А қасиеті орынды" деген сөйлемді $\forall x \ \ A(x)$ немесе $A(x) \ \forall x$ түрлерінде , ал "А қасиеті орындалатын x табылады" деген сөйлемді $\exists x\ A(x)$ түрінде жазуға болады. Мына $(\exists x A(x)) \wedge (\forall y A(y)) \Rightarrow (y = x)$ жазуын былай оқиды: "Егер А қасиеті орындалатын x элементі табылып және у - А қасиеті орындалатын кез-келген элемент болса, онда у=х". Ал бұл, қысқаша, "А қасиеті орындалатын жалғыз элемент х табылады" деген сөйлем, оны қысқа түрде былай $\exists! x\ A(x)$ деп жазады (мұндағы ! белгісі жалғыз дегенді білдіреді).

Сөйлемді ықшамдап жазу үшін сөйлем мағынасын бұзбай мүмкіндігінше жақшаны жазбауға тырысады. Осы мақсатпен сөйлемдер $\in, =\ \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ таңбаларымен байланыстырылады.

Сонымен бірге, кейде ыңғайлылық үшін, анықтаманы арнайы := символы арқылы да жазатын боламыз және мұнда қос нүкте анықталатын объект жағына қойылады. Сонда жоғарыдағы сөйлемді былай жазған болар едік:

$$\exists! x A(x) := (\exists x A(x)) \wedge (\forall y A(y))) \Rightarrow (y = x).$$

Жиі қолданылатын қысқартуларды келтірейік:

$$(\forall x \in X)A := \forall x(x \in X \Rightarrow A(x))\ ;\ (\exists x \in X)A := \exists x(x \in X \wedge A(x))\ ;$$

$$(\forall x > a)A := \forall x((x \in \mathrm{R}) \wedge (x > a) \Rightarrow A(x))\ ;\ (\exists x > a)A := \exists x((x \in \mathrm{R}) \wedge (x > a) \wedge A(x)).$$

Мектептен белгілі " $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ функциясының $a \in \mathrm{R}$ нүктесіндегі шегі $b \in \mathrm{R}$ саны" деген сөйлемді былай жазуға болады:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b := \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Анықтама мен қасиетті толық және жақсы түсіну үшін оған кері анықтама мен қасиетті түзе білудің маңызы зор. Мысалы, "белгілі бір х үшін А(х) қасиеті орынды" сөйлеміне кері сөйлем "кез-келген х үшін А(х) қасиеті орындалмайды", сол сияқты "кез-келген х үшін А(х) қасиеті орынды" сөйлеміне кері сөйлем "А(х) қасиеті орындалмайтын х табылады". Бұл сөйлемдерді логикалық символдар арқылы

$$\neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x);\ \neg(\forall x A(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

түрлерінде жазуға болады.

$\neg A(x)$ орнына кейде $\overline{A(x)}$ деп жазу қабылданған. Сонымен бірге, математикалық логика курсынан белгілі

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}; (\overline{A \vee B}) \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}; (\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$$

екенін есте ұстаған жөн.

Осы айтылғандардан, мысалы,

$$\neg((\forall x > a)A) \Leftrightarrow (\exists x > a)\neg A$$

немесе мұны былай да жазуға болады:

$$\overline{(\forall x > a)A} \Leftrightarrow (\exists x > a)\overline{A}.$$

Бұлардың оң жағында $(\exists x \le a)\neg A$ деп жазсақ қате болар еді. Шынында да,

$$\neg((\forall x > a)A) := \neg(\forall x(x \in \mathrm{R} \wedge x > a) \Rightarrow A(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg(x \in \mathrm{R} \wedge x > a) \Rightarrow A(x)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists x((x \in \mathrm{R} \wedge (x > a) \wedge \neg A(x)) =: (\exists x > a)\neg A.$$

Қарапайым сөйлемдердің терілеуін пайдаланып, кез-келген сөйлемнің терілеуін жазуға болады. Мысалы,

$$\neg(\lim_{x \to a} f(x) = b) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathrm{R}\ (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| \ge \varepsilon).$$

Керілеудің практикалық маңызы кері тұжырымдап дәлелдеу әдісінде байқалады: A тұжырымының дұрыстығын $\overline{A}$ тұжырымының дұрыс еместігінен алады. Сонымен сәйлемді керілеуде $\forall$ кванторын $\exists$ кванторына, $\exists$ кванторын $\forall$ кванторына, $\wedge$ байланысын $\vee$ байланысына, $\vee$ байланысын $\wedge$ байланысына көшіріп жазу керек екен.

Біз жоғарыда нақты сандар жиынын R әрібімен белгілейтінін айттық, ал кейде оны R^1 әрібімен де белгілейді, сондықтан да $+\infty$ және $-\infty$ сандарымен толықтырылған нақты сандар жиынын кейде $\bar{R}^1$ арқылы да белгілейді. Көптеген оқулықтарда нақты сан орнына, қысқаша, сан деп, кейде ақырлы сан деп айтады.

Егер $A \subset R$ жиынының барлық $a \in A$ сандары үшін $a \le M$ шартын қанағаттандыратын M нақты саны табылса, онда $A \subset R$ жиынын жоғарыдан шектелген немесе жоғарыдан шенелген жиын деп атайды.

Егер $A \subset R$ жиынының барлық $a \in A$ сандары үшін $a \ge m$ шартын қанағаттандыратын m нақты саны табылса, онда $A \subset R$ жиынын төменнен шектелген немесе төменнен шенелген жиын деп атайды.

M және m сандарын А жиынының сәйкес жоғарғы шекарасы (мажоранты) және төменгі шекарасы (миноранты) деп атайды.

Бұл анықтамаларды логикалық символикалар арқылы былай жазуға болады:
$\exists M \in R\ (\forall a \in A)\ (a \le M)$, $(\forall a \in A) \exists m \in R\ (a \ge m)$

Енді А жиынының жоғарыдан шектелмегендігін керілеу ережесін пайдаланып,

былай жазады:

$\forall M \in R\ \exists b \in A\ (M < b)$.

Дәл осылай А жиынының төменнен шектелмегендігін былай жазады:
$\exists b \in A\ \forall m \in R\ (b < m)$.

Егер $A \subset R$ жиыны жоғарыдан да, төменнен де шектелген болса, онда онда оны жәй ғана *шектелген* немесе *шенелген* жиын деп атайды.

Мысалы, егер $A = \{1,2,3,...n\}$ болса, яғни 1,2,3,…n сандарынан тұратын жиын болса, онда m үшін кез-келген бірден аспайтын санды, ал M үшін кез-келген n-нен кем емес санды алуға болады. Егер $A = (a,b)$ болса, онда $m \le a$, $M \ge b$ деп алуға болады.

А жиынының жоғарғы шекараларының ең кішісі S бар болса, А жиынының дәл жоғарғы шекарасы деп атайды да $s := \sup A$ немесе $s := \sup\limits_{x \in A} x$ арқылы жазады. Сәйтіп, супремум А немесе А жиынының барлық х элементтерінің супремумы деп оқиды. Дәл осылай А жиынының төменгі шекараларының ең үлкенін А жиынының дәл төменгі шекарасы деп атайды да $i := \inf A$ немесе $i := \inf\limits_{x \in A} x$ арқылы жазады және инфимум А немесе А жиынының барлық х элементтерінің инфимумы деп оқиды.

Дәл жоғарғы (дәл төменгі) шекараның анықтамасы үшін де қабылдауға болатын мына тұжырымды дәлелдейік:

Тұжырым. S саны $A \subset R$ жиынының дәл жоғарғы шекарасы болуы үшін 1) $\forall a \in A\ \ (a \le S)$, 2) $S' < S$ болса, онда $\exists a' \in A (a' > S')$ шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Айталық, S саны A жиынының дәл жоғарғы шекарасы болсын. Онда дәл жоғарғы шекараның анықтамасы бойынша
$\forall a \in A \ \ (a \le S)$.

Енді егер $S' < S$ болатын S' санын алсақ, онда $\exists a' \in A(a' > S')$, әйткені кері жағдайда $\forall a \in A\ (a \le S')$ болар еді де, дәл жоғарғы шекара S жоғарғы шекаралардың ең кішісі болмай қалар еді (жоғарғы шекара $S > S'$).

Жеткіліктілігі. Егер 1) және 2) шарттар орындалса, онда 1) шарт бойынша S саны A жиынының жоғарғы шекарасы болады, 2) шарт бойынша ол ең кіші жоғарғы шекара. Дәл осылай төменгі шекара үшін мына тұжырымды дәлелдеуге болады:

Тұжырым. i саны $A \subset \mathrm{R}$ жиынының дәл төменгі шекарасы болуы үшін 1) $\forall a \in A \ \ (i \le a)$, 2) $i' > i$ болса, онда $\exists a' \in A(a' < i')$ шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті.

Ескерту. Бұл тұжырымдардағы 2) шартты былай да айтуға болады: кез-келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $a' > S - \varepsilon \ \ (a' < i + \varepsilon\ )$ болатын A жиынынан a' элементі табылады.

Бұған көз жеткізу үшін $S - S' = \varepsilon \ \ (i' - i = \varepsilon\ )$ белгілеулерін енгізсе болғаны.

A жиынының дәл шекаралары осы жиында жатуы да, жатпауы да мүмкін. Мысалы, $A \equiv (a,b)$ интервал болса, онда $\inf A = a \notin A,\ \sup A = b \notin A$. Шынында да, $\forall x \in (a,b)$ үшін $a < x < b$, демек, a және b сандары (a,b) интервалының сәйкес төменгі және жоғарғы шекаралары болады. Кез-келген $0 < \varepsilon < b - a$ болатын ε оң саны үшін $a' = S - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ және $a' = S - \varepsilon$, мұндағы $S = b$, демек, b саны (a, b) интервалының ең кіші жоғарғы шекарасы. Дәл осылай $a' = i + \frac{\varepsilon}{2} \in A\ a' < i + \varepsilon$, мұндағы $i = a$, демек a саны (a, b) интервалының ең үлкен төменгі шекарасы.

Енді егер A жиыны $[a, b)$ жарты интервал болса, онда оның супремумы $\sup A = b \notin A,\ \ \inf A = a \in A$.

Егер A жоғарыдан шектелмеген сандар жиыны болса, онда оның супремумы анықтама бойынша $+\infty$, яғни $\sup A \overset{def}{=} +\infty$ немесе $\sup\limits_{A} x = +\infty$, ал егер ол төменнен шектелмеген жиын болса, онда $\inf A \overset{def}{=} -\infty$ немесе $\inf\limits_{A} x = -\infty$.

Жоғарыдағы келтірілген анықтамалардың формальдік жазуын келтірейік.

$(M = \max A) := (M \in A \wedge \forall a \in A(a \le M))$,

$(m = \min A) := (m \in A \wedge \forall a \in A(m \le a))$

$(S = \sup A) := \forall a \in A((a \le S) \wedge (\forall S' < S, \exists a' \in A(a' > S')))$,

$(i = \inf A) := \forall a \in A((a \ge i) \wedge (\forall i' > i, \exists a' \in A(a' < i')))$

немесе

$$\sup A := \min\{M \in R / \forall a \in A((a \le M)\},\ \inf A := \max\{m \in R / \forall a \in A((m \le a)\}.$$

AMR жиынында анықталған f функциясының мәндері жиынының супремумы және инфимумы сәйкес f функциясының супремумы мен инфимумы деп аталады да, $\sup f$, $\sup\limits_{A} f$, $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ және $\inf f$, $\inf\limits_{A} f$, $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ арқылы белгіленеді.

Сонымен, s нақты саны *AMR* жиынында анықталған $f(x)$ функциясының мәндері жиынының супремумы, яғни

$$s = \sup_{x \in A} f(x) := \forall x \in A(f(x) \le s) \wedge \forall s' < s, \exists x' \in A(f(x') > s')$$

Дәл осылай
$i = \inf_{x \in A} f(x) := \forall x \in A(f(x) \geq i) \wedge \forall i' > i, \exists x' \in A(f(x') < i')$.
Кейде бұл теориялық анықтаманы былай да жазады:

$$\sup_A f = s := \forall x \in A(f(x) \leq s) \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in A(f(x') > s - \varepsilon),$$
$$\inf_A f = i := \forall x \in A(f(x) \geq i) \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in A(f(x') < i + \varepsilon).$$

Жоғарғы шекара принципі. Кез-келген жоғарыдан шектелген бос емес сандық жиынның дәл жоғарғы шекарасы бар және ол жалғыз.

Дәлелдеуі. Айталық, A жоғарыдан шенелген бос емес сандық жиын болсын. B арқылы A жиынын жоғарыдан шектейтін барлық сандар жиынын белгілейік. A жоғарыдан шектелген болғандықтан, B бос емес жиын. Әрбір $b \in B$ элемент A жиынын жоғарыдан шектейді, яғни $\forall a \in A(a \leq b)$. a және b сәйкес біздің A және B жиындарының кез-келген элементтері, сондықтан нақты сандардың үзіліссіздік аксиомасы бойынша

$$\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \ \exists s \in R\,(a \leq s \leq b) \tag{1}$$

Мұнан $a \leq s$ теңсіздігінің барлық $a \in A$ үшін орындалуы s саны A жиынын жоғарыдан шектейді дегенді білдіреді де, ал $s \leq b$ теңсіздігінің барлық $b \in B$ үшін орындалуы (яғни A жиынын жоғарыдан шектейтін барлық сандар үшін орындалуы) s сондай сандардың ең кішісі дегенді білдіреді. Егер сандық жиында ең кіші элемент бар болса, онда 11-аксиома бойынша ол жалғыз. Сондықтан жоғарғы шекараның бар екеніне көз жеткізсек болғаны. Демек ол A жиынының дәл жоғарғы шекарасы:

$$s = \sup A \tag{2}$$

Төменгі шекара принципі.

$$\exists m \in \mathrm{R} \ \ \forall a \in A \subset \mathrm{R}\ (m \leq a) \Rightarrow \exists! \inf A$$

Дәлелдеуі. Дәл алдындағы принцип дәлелдеуіндей.

Жиын математикадағы алғашқы және басқа одан да қарапайым ұғымдар арқылы анықталмайтын ұғым. Қандай да бір белгілері бойынша біріктірілген бірнеше заттарды бүтін бір зат деп қарап, оны жиын деп атап, ал ондағы әрбір затты жиын элементі деп атайды. Мысалы, нақты сандар жиыны (R), рационал сандар жиыны (Q), бүтін сандар жиыны (Z), топтағы студенттер жиыны, факультеттегі кафедралар жиыны және т.б. " x заты E жиынының элементі" дегенді $x \in E$ арқылы жазады да оны кейде " x E жиынында жатыр" немесе " x E жиынының элементі" деп те оқиды. Керісінше, " x заты E жиынының элементі емес" немесе " x заты E жиынында жатпайды" дегенді $x \notin E$ немесе $x \overline{\in} E$ немесе $E \not\ni x$ арқылы жазады.

Егер E жиынының барлық элементтері F жиынының да элементтері болса, онда E жиынын F жиынының ішжиыны деп атайды да, оны $E \subset F$ немесе $F \supset E$ арқылы жазады. Мысалы, $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$, ал $\mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$.

Егер $E \subset F$ және $\exists\, x \in F$ әрі $x \notin E$ болса, онда E жиынын F жиынының меншікті ішжиыны деп атайды. Сонымен, меншікті ішжиын оны ұстайтын жиынмен тең бола алмайды. Жоғарыдағы мысалдағы бүтін сандар жиыны рационал сандар және нақты сандар жиындарының, ал рационал сандар жиыны нақты сандар жиынының меншікті ішжиындары.Жиындар теориясында бос жиын ұғымын енгізу ыңғайлы. Бос жиын деп бір де бір элементі жоқ жиынды айтады және оны $\varnothing$ символы арқылы белгілейді. Әрі ол кез-келген жиынның ішжиыны, яғни $\varnothing \subset E$. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ жиындарының бірігуінемесе қосындысы деп кез-келген элементі осы $E_k\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ жиындарының ең болмағанда біреуінің элементі болатын S жиынын айтады да, $S=\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ арқылы белгілейді. Сонымен, егер x ең болмағанда E_k жиындарының біреуінің элементі болса, онда $x \in S$. Біріктіру ұғымы саны ақырсыз $E_1, E_2,..., E_n$ … жиындары үйірі үшін де анықталған. Саны ақырсыз $E_k(k=1,2,...n,...)$ жиындар үйірінің бірігуі $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ арқылы белгіленеді және S жиыны $E_k(k=1,2,...n,...)$ жиындарының ең болмағанда біреуінде жататын элементтерден тұрады.